

ЛЕКЦИЯ 15

§ 1. Сызықтық біртекті емес теңдеулерді интегралдау

Сызықтық біртекті емес (квазисызықтық) теңдеу

$$f_1(t_1, \dots, t_n, x) \frac{\partial x}{\partial t_1} + \dots + f_n(t_1, \dots, t_n, x) \frac{\partial x}{\partial t_n} = g(t_1, \dots, t_n, x) \quad (1)$$

қарастырайық. Мұндағы f_j , $j = \overline{1, n}$ және g функцияларын $D^* \subset R_{t,x}^{n+1}$ облысында барлық аргументтері бойынша үзіліссіз дифференциалданады және бәрі бірдей f_j -лер нөлге айналмайды деп есептейік. Теңдеудің оң жағы жоқ болған күннің өзінде, $f_j(t_1, \dots, t_n, x)$, $j = \overline{1, n}$ функцияларының ең болмағанда біреуі x -тен тәуелді болса, (1) теңдеу квазисызықтық теңдеулер қатарына жатады (§ 1-ді қараңыз).

(1) теңдеудің шешімі геометриялық тұрғыдан бетті анықтайды, оны *интегралдық бет* деп атайтынын айтқанбыз. Ол бет $t_1, \dots, t_n, x$ айныма-лыларының кеңістігі $R_{t,x}^{n+1}$ де орналасады. Квазисызықтық (1) теңдеуді сызықтық біртекті түрге келтіру арқылы интегралдайды. Ол үшін (1) теңдеудің шешімін айқындалмаған түрде

$$v(t_1, \dots, t_n, x) = 0 \quad (2)$$

іздейді. Мұндағы v функциясын D^* облысында барлық аргументтері бойынша үзіліссіз дифференциалданады және $\partial v / \partial x \neq 0$ деп есептейді. Егер $x = x(t_1, \dots, t_n)$ функциясы (2) теңдеуден табылатын болса, онда

$$v(t_1, \dots, t_n, x(t_1, \dots, t_n)) = 0, \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in D \subset R^* \quad (2^*)$$

тепе-теңдігі алынар еді. Бұл тепе-теңдікті t_j бойынша дифференциалдау арқылы

$$\frac{\partial v}{\partial t_j} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_j} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial t_j} = - \frac{\partial v / \partial t_j}{\partial v / \partial x}$$

тепе-теңдігін аламыз. Табылған мәндерді (1) теңдеуге апарып қойып,

оны $-\frac{\partial v}{\partial x}$ бөлшегіне көбейтіп, содан кейін барлық мүшелерді теңдеудің сол жағына көшірсек,

$$f_1(t_1, \dots, t_n, x) \frac{\partial v}{\partial t_1} + \dots + f_n(t_1, \dots, t_n, x) \frac{\partial v}{\partial t_n} + g(t_1, \dots, t_n, x) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

теңдеуін аламыз. Бұл $-\frac{\partial v}{\partial t_j}, \frac{\partial v}{\partial x}$ дербес туындылар бойынша сызықтық біртекті теңдеу. Бұл теңдеудің сипаттауыштарын мына жүйені

$$\frac{dt_1}{f_1} = \dots = \frac{dt_n}{f_n} = \frac{dx}{g} \quad (4)$$

интегралдау арқылы табамыз. (4) жүйенің интегралдық қисықтары квазисызықтық (3) теңдеудің *сипаттауыштары* деп аталады. Бұл сипаттауыштар D^* облысын түгелдей толтырады және D^* облысының әрбір нүктесінен бір ғана сипаттауыш өтеді. (4) жүйенің өзара тәуелсіз бірінші интегралдары табылсын:

$$\varphi_j(t_1, \dots, t_n, x) = C_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Онда (3) теңдеудің жалпы шешімі

$$v = \Phi(\varphi_1(t_1, \dots, t_n, x), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n, x)) \quad (5)$$

түрінде болады. Мұндағы $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – барлық $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ -дер бойынша үзіліссіз дифференциалданатын кез келген функция. Енді (1) теңдеудің шешімін (2) түрде іздеп отырғанымызды ескерсек,

$$\Phi(\varphi_1(t_1, \dots, t_n, x), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n, x)) = 0 \quad (6)$$

өрнегін аламыз. Бұл өрнек (1) теңдеудің шешімін айқындалмаған түрде анықтайды.

Шешім интегралдардың кез келген функциясы арқылы өрнектеліп тұр. Сондықтан ол, жалпы алғанда, (1) теңдеудің кез келген шешімін беруі, яғни жалпы шешімі болуы керек. Оның

қаншалықты жалпы бола-тынын анықтайық. (6) формуланы алу барысында, алғашында (2*) тепе-теңдікті пайдаландық. Ол тепе-теңдік $t_1, \dots, t_n$ айнымалылары бойынша орындалып тұр. Ал $v(t_1, \dots, t_n, x)$ функциясы (3) теңдеуді тепе-теңдікпен қанағаттандыру үшін бұл жеткіліксіз. Ол үшін (2) теңдеу $t_1, \dots, t_n$ және x айнымалылары бойынша тепе-теңдікпен орындалуы керек. Сондықтан (2*) тепе-теңдікті пайдаланып тапқан (6) шешімнен басқа (2) теңдеуден анықталатын және (3) теңдеуді $t_1, \dots, t_n, x$ бойынша емес, тек қана $t_1, \dots, t_n$ бойынша тепе-теңдікпен қанағаттандыратын $x = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ шешімі бар болуы мүмкін. Басқа сөзбен айтқанда, бұл жағдайда $v(t_1, \dots, t_n, x)$ (3) теңдеудің шешімі болмайды, ал $v(t_1, \dots, t_n, x) = 0$ теңдеуінен табылатын $x = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ функциясы осы теңдеудің $v(t_1, \dots, t_n, x) \equiv 0$ болған кездегі шешімі болады. Мұндай шешімдерді *арнайы* шешім деп атайды. Олардың саны көп емес, әрі сирек кездеседі ([15], 5-тарау, § 2).

КОШИ ЕСЕБІ. Бұл есеп (1) теңдеуге сызықтық біртекті теңдеуге қойылғандай етіп қойылады. $D^* \subset R_{t,x}^{n+1}$ облысында жататын $n-1$ өл-шемді D_0^* облысын алып, шешімнің ол облыстағы түрін беру керек. D_0^* облысы параметрлік түрде бейнеленсін:

$$t_j = \omega_j(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$x|_{D_0^*} = \omega(s_1, \dots, s_{n-1}). \quad (8)$$

Жалпы шешімді құрайтын тәуелсіз бірінші интегралдарға (7) функция-ларды қояйық:

$$\varphi_j|_{D_0^*} = \varphi_j(\omega_1(s_1, \dots, s_{n-1}), \dots, \omega_n(s_1, \dots, s_{n-1}), x) = C_j, \quad j = \overline{1, k}.$$

Бұл жүйе $s_1, \dots, s_{n-1}, x$ айнымалылары бойынша шешілсін:

$$s_j = v_j(C_1, \dots, C_n), \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$x = u(C_1, \dots, C_n).$$

Сонда Коши есебінің шешімін мына өрнек береді:

$$u[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, x), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n, x)] - \omega\{v_1[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, x), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n, x)], \dots, v_{n-1}[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, x), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n, x)]\} = 0. \quad (9)$$

Шынында да, бұл өрнек (6) өрнекке енеді: $\Phi \equiv u - \omega$. Ал D_0^* облысында $\varphi_j|_{D_0^*} = C_j$, $j = \overline{1, n}$, екенін ескерсек, (9) өрнек (8) шартты қанағаттандырып тұр:

$$(u - \omega)|_{D_0^*} = u(C_1, \dots, C_n) - \omega[v_1(C_1, \dots, C_n), \dots, v_{n-1}(C_1, \dots, C_n)] = x - \omega(s_1, \dots, s_{n-1}) = 0.$$

МЫСАЛДАР.

1. Мына теңдеудің

$$(t_1 - a_1) \frac{\partial x}{\partial t_1} + (t_2 - a_2) \frac{\partial x}{\partial t_2} + \dots + (t_n - a_n) \frac{\partial x}{\partial t_n} = x - a$$

жалпы шешімін табу керек, мұндағы $a_1, \dots, a_n$, a – тұрақтылар.

ШЕШУІ. Жалпы шешімді айқындалмаған (2) түрде іздейміз.

Сонда $\frac{\partial v}{\partial t_j}, \frac{\partial v}{\partial x}$, $j = \overline{1, n}$ функциясы бойынша сызықтық біртекті ($v(t_1, \dots, t_n, x) = 0$)

$$(t_1 - a_1) \frac{\partial v}{\partial t_1} + (t_2 - a_2) \frac{\partial v}{\partial t_2} + \dots + (t_n - a_n) \frac{\partial v}{\partial t_n} + (x - a) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

теңдеуін аламыз. Оған сәйкес симметриялық жүйе

$$\frac{dt_1}{t_1 - a_1} = \frac{dt_2}{t_2 - a_2} = \dots = \frac{dt_n}{t_n - a_n} = \frac{dx}{x - a}$$

түрінде болады. Алғашқы бөлшектердің әрқайсысын соңғы бөлшекке теңестіру арқылы бұл жүйенің өзара тәуелсіз n бірінші интегралдарын

$$\frac{t_1 - a_1}{x - a} = C_1, \quad \frac{t_2 - a_2}{x - a} = C_2, \quad \dots, \quad \frac{t_n - a_n}{x - a} = C_n$$

аламыз. Демек, берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$v = \Phi\left(\frac{t_1 - a_1}{x - a}, \frac{t_2 - a_2}{x - a}, \dots, \frac{t_n - a_n}{x - a}\right) = 0$$

өрнегі арқылы айқындалмаған түрде табылады.

2. Сызықтық біртекті емес

$$(1 + \sqrt{x - t_1 - t_2}) \frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial t_2} = 2 \quad (10)$$

теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

ШЕШУІ. Жалпы шешімді анықтайтын $v(t_1, t_2, x)$ функциясы бойынша сызықтық біртекті

$$(1 + \sqrt{x - t_1 - t_2}) \frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial t_2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

теңдеуі алынады. Бұған сәйкес симметриялық жүйенің

$$\frac{dt_1}{1 + \sqrt{x - t_1 - t_2}} = \frac{dt_2}{1} = \frac{dx}{2}$$

екі тәуелсіз бірінші интегралдары

$$x - 2t_2 = C_1, \quad t_2 + 2\sqrt{x - t_1 - t_2} = C_2$$

бар. Сондықтан теңдеудің жалпы шешімін

$$v = \Phi(x - 2t_2, t_2 + 2\sqrt{x - t_1 - t_2}) = 0 \quad (11)$$

өрнегі анықтайды.

Берілген теңдеудің жалпы шешімге енбейтін

$$x = t_1 + t_2$$

арнайы шешімі бар. Егер $v = x - t_1 - t_2$ функциясын (10) теңдеуге апарып қоятын болсақ,

$$-\sqrt{x-t_1-t_2} = -\sqrt{v} = 0 \quad (12)$$

теңдеуді аламыз. Бұл теңдеу $v(t_1, t_2, x)$ функциясы нөлге айналатын кезде ғана тепе-теңдікке айналады, яғни $x = t_1 + t_2$ болған кезде нөлге тепе-тең болады. Ал бұл кезде берілген теңдеудің коэффициенттері, атап айтқанда, $f_1(t_1, t_2, x) := 1 + \sqrt{x-t_1-t_2}$ функциясы өз аргументтері бойынша үзіліс-сіз дифференциалданбайды. Сондықтан да (12) шешім (10) теңдеуді тепе-тең қанағаттандыратын (11) функциядан барлық кезде емес, тек $v(t_1, t_2, x) = 0$ теңдігі орындалатын кезде ғана алынып тұр ([4], VIII-тарау, § 3).

3. Коши есебінің

$$(t_2 - x) \frac{\partial x}{\partial t_1} + (x - t_1) \frac{\partial x}{\partial t_2} = t_1 - t_2, \quad x = -t_1 = t_2$$

шешімін табу керек.

ШЕШУІ. Сәйкес симметриялық түрдегі жүйе құрайық:

$$\frac{dt_1}{t_2 - x} = \frac{dt_2}{x - t_1} = \frac{dx}{t_1 - t_2}.$$

Үш бөлшектің алымдары мен бөлімдерін өзара қосу арқылы

$$\frac{d(t_1 + t_2 + x)}{0} = \frac{dt_1}{t_2 - x}, \Rightarrow d(t_1 + t_2 + x) = 0$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$t_1 + t_2 + x = C_1$$

бірінші интегралы табылады. Ал бірінші бөлшектің алымы мен бөлімін t_1 -ге, екінші бөлшектікін t_2 -ге, үшінші бөлшектікін x -ке көбейтіп, алынған бөлшектердің алымдары мен бөлімдерін өзара қосу нәтижесінде

$$\frac{d(t_1^2 + t_2^2 + x^2)}{0} = \frac{dt_1}{t_2 - x}, \Rightarrow d(x^2 + t_1^2 + t_2^2) = 0$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$t_1^2 + t_2^2 + x^2 = C_2$$

бірінші интегралы алынады. Бірінші интегралдар өзара тәуелсіз. Бастапқы шарттағы параметр s_1 -дің орнына t_1 -ді алайық. Онда $t_1 = t_1$, $t_2 = -t_1$, $x = -t_1$ болады да бірінші интегралдардан

$$\begin{cases} t_1 - t_1 - t_1 = C_1, \\ t_1^2 + t_1^2 + t_1^2 = C_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t_1 = C_1, \\ 3t_1^2 = C_2. \end{cases}$$

жүйесі алынады. Оның біреуінен t_1 -ді тауып, екіншісіне қою арқылы бірінші интегралдардың арасындағы байланысты

$$3C_1^2 = C_2$$

табамыз. Сонда, (9) формула бойынша, Коши есебінің шешімі болып,

$$3(t_1 + t_2 + x)^2 = t_1^2 + t_2^2 + x^2$$

функциясы табылады.

Жаттығулар

Теңдеулердің жалпы шешімін табыңыздар.

1. $t_1^2 x \frac{\partial x}{\partial t_1} + t_2^2 x \frac{\partial x}{\partial t_2} = t_1 + t_2$;
2. $\sin^2 t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} + (\operatorname{tg} x) \frac{\partial x}{\partial t_2} = \cos^2 x$;
3. $(t_1 x + t_2) \frac{\partial x}{\partial t_1} + (t_1 + t_2 x) \frac{\partial x}{\partial t_2} = 1 - x^2$;
4. $(x - t_1) \frac{\partial x}{\partial t_1} + (x - t_2) \frac{\partial x}{\partial t_2} - t_3 \frac{\partial x}{\partial t_3} = t_1 + t_2$.

Коши есебінің шешімін табыңыздар:

5. $(\operatorname{tg} t_1) \frac{\partial x}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial x}{\partial t_2} = x$; $t_2 = t_1$; $x = t_1^3$;
6. $t_2 x \frac{\partial x}{\partial t_1} + t_1 x \frac{\partial x}{\partial t_2} = t_1 \cdot t_2$; $t_1 = a$; $t_2^2 + x^2 = a^2$;

$$7. t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} + (t_1 x + t_2) \frac{\partial x}{\partial t_2} = x; \quad t_1 + t_2 = 2x; \quad t_1 x = 1;$$

$$8. (t_1 - x) \frac{\partial x}{\partial t_1} + (t_2 - x) \frac{\partial x}{\partial t_2} = 2x; \quad t_1 - t_2 = 2; \quad x + 2t_1 = 1.$$

Бақылау сұрақтары

1. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі қалай қойылады?
2. Бірінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеудің қандай түрлері бар?
3. Сызықтық біртекті теңдеуді интегралдаудың сипаттауыштар әдісі деген не? Жалпы шешімі қай түрде?
4. Сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін қандай түрде іздейді?
5. Сызықтық біртекті емес теңдеу үшін қойылған Коши есебі қалай шешіледі?

§ 2. Сызықтық теңдеулердің үш өлшемді кеңістіктегі түсініктемесі

Белгісіз функция x екі айнамадан тәуелді болсын: $x = x(t, s)$. Осы t, s, x айнымалыларын үш өлшемді кеңістік нүктелерінің координаттары есебінде қарастырайық. Бұлай қарастыру сызықтық теңдеулердің мәнін тереңірек ашуға мүмкіндік береді.

1. Әуелі сызықтық біртекті теңдеуді

$$a(t, s) \frac{\partial x}{\partial t} + b(t, s) \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad (1)$$

қарастырайық. Мұндағы $a(t, s), b(t, s)$ функцияларын $D \subset \mathbf{R}^2$ облысында барлық бірінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз және $a^2(t, s) + b^2(t, s) > 0$ деп есептейік.

$$(1) \text{ теңдеудің сол жағын } (a, b) \text{ векторы мен } \text{grad } x := \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s} \right)$$

векторының скаляр көбейтіндісі есебінде қарастыруға болады. Онда (1) теңдеу x функциясынан (a, b) векторының бағыты бойынша алынған туындының нөлге тең екенін білдіріп тұр. (t, s) жазықтығында жататын, жанама векторы (a, b) -мен бағыттас болатын G қисығын қарастырайық. Оның параметрлік өрнегін (параметр τ болсын) мына теңдеулер жүйесінен

$$\frac{dt}{d\tau} = a(t, s), \quad \frac{ds}{d\tau} = b(t, s) \quad (2)$$

алуға болады. (2) теңдеудің (t, s) жазықтығындағы фазалық траекториясы болып

$$\frac{dt}{ds} = \frac{a(t, s)}{b(t, s)} \quad \text{немесе} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{b(t, s)}{a(t, s)} \quad (3)$$

теңдеуінің интегралдық қисығы табылады. Ол қисық (1) теңдеудің сипаттауышын береді. Әдетте (3) теңдеулерді қосарлап қарастырудың орнына $b(t, s) \neq 0$ болғанда біріншісін, $a(t, s) \neq 0$ болғанда екіншісін) t, s айнымалылары бойынша симметриялық

$$\frac{dt}{a(t, s)} = \frac{ds}{b(t, s)} \quad (4)$$

теңдеуін қарастырады. $a(t, s) \in C^1(D)$, $b(t, s) \in C^1(D)$, $a^2 + b^2 > 0$ болғандықтан, D облысының кез келген нүктесі арқылы (1) теңдеудің жалғыз ғана сипаттауышы өтеді.

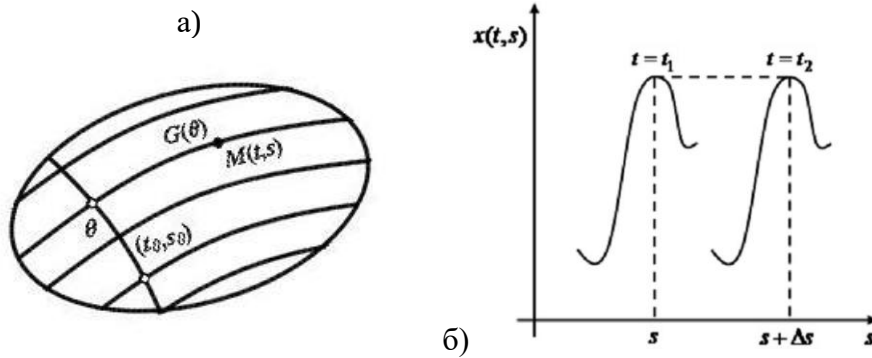
$x = x(t, s)$ (1) теңдеудің интегралдық беті болсын. Оны сипаттауыш-тардың үстінде қарастырайық. Онда x параметр τ -дың күрделі функция-сы болады: $x = x(t(\tau), s(\tau))$. Осы күрделі функцияның τ бойынша толық туындысын (2) жүйеге сүйеніп табайық:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} = a(t, s) \frac{\partial x}{\partial t} + b(t, s) \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Демек, (1) теңдеу негізінде $\frac{dx}{d\tau} = 0$, яғни интегралдық беттің

сипаттауыш үстіндегі аппликаты өзінің тұрақты мәнін сақтайды. Басқа сөзбен айтқанда, сипаттауыш интегралдық беттің деңгейлік сызығы болып табылады. Сипаттауышпен беттеспейтін қандай да бір γ қисығын қарастырайық. D облысынан кез келген $M(t, s)$ нүктесін алып, ол арқылы сипаттауыш жүргізейік. Оның γ қисығымен қиылысу нүктесі осы сипаттауышты бізмәнді анықтайды, яғни сипаттауыштар бірпараметрлі үйір құрайды. Параметр үшін, мысалы, γ қисығының бойымен қиылысу нүктесінен белгілі бір бекітілген (t_0, s_0) нүктесіне дейінгі жолдың ұзындығын алуға болады. Ол

ұзындықты θ арқылы белгілейік. Сипаттауыштағы M нүктесінің орны τ параметрі арқылы анықталады. (2) жүйенің оң жағы τ -дан тәуелсіз. Сондықтан τ -ды



20-сурет

тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен енгізуге болады. Сол себепті әрбір сипаттауыштың γ қисығымен қиылысу нүктесі $\tau = \tau_0$ мәніне сәйкес деп есептейміз (20, а-сурет).

Сонымен D облысында әрбір $M(t,s)$ нүктесіне екі санның (θ, τ) жұбын сәйкес қоюға болады. Мұнда θ – M нүктесінен өтетін сипаттауышты, ал τ – параметрдің сипаттауыш бойындағы M нүктесіне тиісті мәнін анықтайды. Яғни бізмәнді сәйкестік

$$\begin{cases} t = T(\theta, \tau), \\ s = S(\theta, \tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \Theta(t, s), \\ \tau = R(t, s) \end{cases} \quad (5)$$

анықталады. (θ, τ) айнымалылары арқылы сипаттауыштың теңдеуі былайша жазылады:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0 \Rightarrow \theta = C.$$

Демек, сипаттауыштың бойында

$$\Theta(t, s) = C \quad (6)$$

теңдігі орындалады. Әлбетте, θ, τ айнымалыларына көшу (1) теңдеудің шешімін оңай табуға мүмкіндік береді. Мынадай белгілеу

$$x(t, s) = x(T(\theta, \tau), S(\theta, \tau)) =: v(\theta, \tau)$$

енгізейік. (5) теңдіктердің негізінде, θ , τ , v айнамалылары бойынша,

(1) теңдеу $\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$ түрінде жазылады. Себебі сипаттауыштың бойында шешім (яғни (4)-тің интегралы) өз мәнін өзгертпейді (сақтайды). Ал $\partial v / \partial \tau = 0$ теңдігі v -ның тек қана θ -дан тәуелді болатынын білдіреді, яғни $v = \Phi(\theta)$. Олай болса,

$$x(t, s) = \Phi(\Theta(t, s)). \quad (7)$$

Мұнда $\Phi(\theta)$ – өзінің аргументі (θ) бойынша үзіліссіз болатын кез келген функция.

Демек, (1) теңдеудің жалпы шешімі (7) түрде болады. Ондағы Φ – өз аргументі $\Theta(t, s)$ -дан үзіліссіз болатын кез келген функция, ал $\Theta(t, s)$ – (4) теңдеудің интегралы ((6) теңдіктің сол жағы). Керісінше, егер (4) теңдеудің интегралы болатын $\varphi(t, s)$ функциясы табылса, ол функция θ , τ айнымалылары арқылы өрнектелгенде, тек қана θ -дан тәуелді болуы керек: $\varphi(T(\theta, \tau), S(\theta, \tau)) =: \tilde{\varphi}(\theta)$. Ал (7) шешімдегі Φ функциясы еркін (кез келген) болғандықтан, жалпы шешімді (7) түрде ғана емес,

$$x(t, s) = \Phi(\varphi(t, s)) \quad (8)$$

түрінде де жазуға болады.

Шынында, бұл жағдайда да (7) түрге келеміз:

$$\Phi(\varphi(t, s)) = \Phi(\tilde{\varphi}(\theta)) = \tilde{\Phi}(\theta).$$

Енді Коши есебін, яғни (7) беттердің ішінен берілген сызық арқылы өтетінін, табуды қарастырайық.

Теңдеуі $t = t(r)$, $s = s(r)$ болатын, нүктеге айналмайтын, ешбір ара-лықта сипаттауышпен беттеспейтін γ_1 қисығы берілсін және онда

$$x(t, s)|_{\gamma_1} = \omega(r) \quad (9)$$

шарты орындалсын, $\omega(r) - r$ айнымалысының берілген функциясы. Сипаттауыш емес γ_1 қисығының бойында $\Theta(t, s)$ өзгермелі:

$$\Theta(t, s)|_{\gamma_1} = z = \Theta(t(r), s(r)) =: \tilde{\Theta}(r),$$

яғни r айнымалысының функциясы болады. $\tilde{\Theta}(r)$ функциясын r -дің қарастырылатын мәндерінде монотонды деп есептейік. Демек,

$$r = R(z), \Rightarrow \omega(r) = \omega(R(z)),$$

яғни x -тің $z \in \gamma_1$ нүктесіндегі мәні $\omega(R(z))$ -ге тең. Егер γ_1 қисығының осы z нүктесі арқылы сипаттауыш жүргізсе, онда оның теңдеуі $\Theta(t, s) = z$ түрінде болады да, ал шешімнің сипаттауыш нүктелеріндегі мәні $\omega(R(\Theta(t, s)))$ -ге тең болады. D облысының кез келген нүктесі арқылы сипаттауыш өтетін болғандықтан, $\omega(R(\Theta(t, s)))$ функциясы шешімнің D облысының кез келген нүктесіндегі өрнегі болып табылады:

$$x(t, s) = \omega(R(\Theta(t, s))). \quad (10)$$

Бұл функцияның Коши есебінің шешімін (дара шешімді) беретініне көз жеткізу қиын емес. Біріншіден, (10) – шешім, себебі (7) формулаға кіреді. Екіншіден, (9) шартты

$$x(t, s)|_{\gamma_1} = \omega(R(z)) = \omega(r)$$

қанағаттандырып тұр.

Әлбетте, жалпы шешім мен дара шешімді табу барысында жүргізілген барлық пайымдауларда $\Theta(t, s)$ -тің орнына $\varphi(t, s)$ -ті қолдануға болады.

МЫСАЛ. Мына теңдеудің

$$a \frac{\partial x}{\partial t} + b \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad (11)$$

жалпы шешімін және

$$x(t, s)|_{s=0} = \omega(t)$$

(12)

шартын қанағаттандыратын шешімін табу керек. Мұнда a, b тұрақтылар, γ_1 қисығының теңдеуі $s=0$, ал r параметрінің орнында t тұр.

ШЕШУІ. Симметриялық

$$\frac{dt}{a} = \frac{ds}{b}$$

теңдеуінен $s - v_0 t = C$ бірінші интегралын табамыз, $v_0 := \frac{b}{a}$. Демек, (11) теңдеудің жалпы шешімі

$$x(t, s) = \Phi(s - v_0 t).$$

Бұл функция толқындар қозғалысын зерттегенде жиі қолданылады. Сондықтан $\Phi(s - v_0 t)$ функциясын жылдамдығы v_0 -ге тең, қырынан қарағанда $\Phi(s)$ арқылы өрнектелетін *сырғымалы тік толқын* деп атайды. Бұны түсіну үшін $F(s)$ функциясын t_1 және t_2 мезеттерде қырынан қарастырайық (20, б-сурет). Егер $v_0 > 0$, $t_2 > t_1$ болса, толқынның екінші жолы оның бірінші жолын $\Delta s = (t_2 - t_1)v_0$ шамасына оңға қарай жылжытқаннан алынады. Расында да

$$s + \Delta s - v_0 t_2 = s - v_0 t_1,$$

яғни s және Δs нүктелеріндегі Φ функциясының толық аргументтері бірдей, ал сырғу жылдамдығы $\Delta s / s = v_0$. Енді (11), (12) есептің шешімін қарастырайық. Бұл жағдайда

$$\varphi(t, s) = s - v_0 t, \quad \varphi(t, s)|_{\gamma_1} = -v_0 t = z \Rightarrow t = R(z) = -\frac{z}{v_0}.$$

Сондықтан ізделінетін шешім

$$x(t, s) = \omega\left(\frac{\varphi(t, s)}{-v_0}\right) = \omega\left(t - \frac{s}{v_0}\right)$$

болады. Ол қырынан $\omega(t)$ функциясы арқылы бізмәнді анықталатын

сырғымалы тік толқын береді.

Енді γ_1 қисығы қандай да бір сипаттауышпен беттеседі екен дейік. Онда әр түрлі жағдайлар болуы мүмкін.

$$1) x(t, s)|_{\gamma_1} = x_0 = const,$$

онда шешім бірімәнді бола алмайды. Себебі кез келген $x(t, s) = f(\Theta(t, s))$ функциясы есептің шешімі бола алады, тек $f(\Theta(t, s)|_{\gamma_1}) = x_0$ теңдігі орындалса болғаны. Мысалы, $f(\Theta(t, s)) := \Phi(\Theta(t, s)) - \Phi(\Theta(t, s)|_{\gamma_1}) + x_0$ деп алса жеткілікті, мұндағы Φ – кез келген функция, $\Phi(\Theta(t, s)|_{\gamma_1}) = const$.

$$2) x(t, s)|_{\gamma_1} \neq const.$$

Бұл жағдайда есептің шешімі жоқ. Себебі (1) теңдеудің әрбір шешімі сипаттауыштың бойында тұрақты мән қабылдайды. Сондықтан шешім γ_1 -дің бойында тұрақты емес деген шарт орындалмайды.

2. Сызықтық біртекті емес теңдеу

$$a(t, s, x) \frac{\partial x}{\partial t} + b(t, s, x) \frac{\partial x}{\partial s} = c(t, s, x) \quad (13)$$

қарастырайық.

Мұндағы a, b, c функцияларын $D \in R_{t,s,x}^3$ облысында үзіліссіз диф-ференциалданады және $a^2 + b^2 > 0$ деп есептейміз. Сызықтық біртекті теңдеуге қарағанда бұл жағдайда өзгешелік бар. Сипаттауыш $R_{t,x}^2$ кеңістігінде емес, $R_{t,s,x}^3$ кеңістігінде жатады.

ТЕОРЕМА. Сызықтық біртекті емес теңдеудің әрбір $x = \varphi(t, s)$ интегралдық беті тек сипаттауыштардан ғана тұрады, яғни беттің әрбір нүктесі арқылы осы бетте түгелімен жататын сипаттауыш өтеді.

ДӨЛЕЛДЕУІ. (13) теңдеуге сәйкес симметриялық жүйе

$$\frac{dt}{a(t, s, x)} = \frac{ds}{b(t, s, x)} = \frac{dx}{c(t, s, x)} \quad (14)$$

қарастырайық. Интегралдық беттің бойында

$$\frac{dt}{a(t, s, \varphi(t, s))} = \frac{ds}{b(t, s, \varphi(t, s))} \quad (15)$$

теңдеуін немесе онымен эквивалент (бөлшектерді τ параметрінің дифференциалы $d\tau$ -ға теңестіргенде шығатын)

$$\frac{dt}{d\tau} = a(t, s, \varphi(t, s)), \quad \frac{ds}{d\tau} = b(t, s, \varphi(t, s)) \quad (16)$$

жүйесін қарастырайық. (14) теңдеудің интегралдық қисықтары (16) жүйенің (t, s) жазықтығындағы траекториялары болып табылады. Осы қисықтардың ішінен біреуін бөліп алайық: $t = \psi_1(\tau)$, $s = \psi_2(\tau)$, τ – параметр. Оған (t, s, x) кеңістігінде

$$t = \psi_1(\tau), \quad s = \psi_2(\tau), \quad x = \varphi(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)) \quad (17)$$

қисығы сәйкес келеді. Әлбетте, бұл қисық интегралдық бетте жатады (оның теңдеуін қанағаттандырады). Оның сипаттауыш екенін, яғни (14) жүйені қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін (17) функциялардың бойында

$$\frac{dx}{c(t, s, x)} = d\tau \Leftrightarrow \frac{dx}{d\tau} = c(t, s, x)$$

болатынын көрсету жеткілікті. Расында да,

$$a(t, s, \varphi(t, s)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b(t, s, \varphi(t, s)) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = c(t, s, \varphi(t, s))$$

тепе-теңдігі орындалатын болғандықтан,

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} = a(t, s, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b(t, s, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = c(t, s, \varphi) = c(t, s, x).$$

Керісінше, интегралдық бет белгісіз болып, сипаттауыштар табылған болсын. Егер сипаттауыштар бет құрайтын болса, ол беттің жанама векторы осы сипаттауыштардың жанама векторы $\{a; b; c\}$ -ға тең болған болар еді. Ал ол вектор $\{\partial \varphi / \partial t; \partial \varphi / \partial s; -1\}$ векторына ортогонал. Соңғы вектор беттің нормалдық векторы болғандықтан, ортогоналдық шарт (13) теңдеудің тепе-теңдікпен орындалуын көрсетеді. Сонымен (14) жүйе қос параметрлік сипаттауыштар үйірін береді. Оларды, бірінші интегралдарды пайдаланып, мына түрде

$$\varphi_1(t, s, x) = C_1, \quad \varphi_2(t, s, x) = C_2 \quad (18)$$

жазамыз. Бұл үйір D облысын толығымен қамтиды (жабады). Бізге осы жиыннан, интегралдық бет құрайтын екі өлшемді жиын бөліп алу керек. Ол үшін C_1, C_2 параметрлерін жатық байланыстыратын кез келген қатынас

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

алса жеткілікті. Онда (13) теңдеудің кез келген

$$\Phi(\varphi_1(t, s, x), \varphi_2(t, s, x)) = 0 \quad (19)$$

шешімін аламыз (§ 2-дегі (6) формуламен салыстырыңыз және сол жерде айтылған пайымдауға көңіл аударыңыз).

Коши есебін қарастырайық, яғни (19) беттердің ішінен берілген қи-сық арқылы өтетінін табу жолын көрсетейік. Белгілі бір γ_1 қисығы беріл-сін:

$$t = T(r), \quad s = S(r), \quad x = X(r). \quad (20)$$

Симметриялық (14) жүйенің (18) бірінші интегралдарына (20) функцияларды қоялық:

$$\varphi_1(T(r), S(r), X(r)) = C_1, \quad \varphi_2(T(r), S(r), X(r)) = C_2. \quad (21)$$

Бұдан r параметрін жою арқылы

$$\Phi_0(C_1, C_2) = 0$$

қатынасын табамыз. Сондықтан іздеп отырған беттің теңдеуі –

$$\Phi_0(\varphi_1(t, s, x), \varphi_2(t, s, x)) = 0. \quad (22)$$

Φ_0 бетін табудың геометриялық мәні мынадай: берілген γ_1 қисы-ғының әрбір нүктесі арқылы сипаттауыш жүргізіледі. Олардың үйірі іздеп отырған бетті береді.

Интегралдық беттің (22) өрнегінің орнына кейде оның параметрлік түрін қарастырған қолайлы болады. Мысалы, параметрлер үшін, r -мен қатар t -ны алайық. Сосын $c(t, s, x) = 0$

дейік. Онда бір интеграл x болады да, екіншісі $\varphi_2(t, s, x)$ болады және ізделінетін бетті

$$t = t, \quad s = s(t, r), \quad x = X(r)$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы $s(t, r)$ мына теңдеу

$$\varphi_2(t, s, X(r)) = \varphi_2(T(r), S(r), X(r))$$

арқылы айқындалмаған түрде анықталады. Бұл теңдеу γ_1 қисығының r нүктесі арқылы өтетін сипаттауыштың (t, s) жазықтығына проекциясын береді. Ал $x = X(r)$ осы проекцияның үстіндегі аппликатың мәнін береді.

(21) өрнекті алу барысында айрықша жағдай кездесуі мүмкін. Ол жағдай (21) теңдеулердің екеуінің де сол жағы тұрақтыға тепе-тең болғанда кездеседі. Ол кезде, $\varphi_1|_{\gamma_1} \equiv C_1^0, \varphi_2|_{\gamma_1} \equiv C_2^0$ болғандықтан, $\Phi_0(C_1^0, C_2^0) = 0$ қатынасының еркіндік дәрежесі өте үлкен болады, яғни Φ_0 функциясы (тұрақтылардың функциясы) кез келген дерлік болады. Тек ол соңғы теңдікті қанағаттандырса болғаны. Мысалы:

$$\Phi_0(C_1, C_2) = \psi(C_1, C_2) - \psi(C_1^0, C_2^0)$$

деп алуға болады. Мұндағы ψ – қос аргументінің кез келген дифференциалданатын функциясы. Интегралдардың γ_1 қисығының бойында тұрақ-тыға тепе-тең болуы, ол қисықтың сипаттауыш екенін білдіреді. Ал олай болса, сипаттауыш арқылы шексіз көп интегралдық беттер өткізуге болады екен.

МЫСАЛДАР.

1. Коши есебінің

$$(1 + \sqrt{x - t - s}) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = 2; \quad s = 0, \quad x = t$$

шешімін табу керек.

ШЕШУІ. Сипаттауыштар жүйесінің тәуелсіз интегралдары мына функциялар (§ 2, 2-мысал):

$$x - 2s = C_1, \quad s + 2\sqrt{x - t - s} = C_2.$$

Бұл интегралдарды бастапқы шартқа қояйық. Әуелі $s=0$ мәнін қояйық. Онда

$$x = C_1, \quad 2\sqrt{x-t} = C_2.$$

Бұны бастапқы шарттың екіншісіне қояйық ($x=t$):

$$2\sqrt{C_1 - C_1} = C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Демек, қойылған есептің шешімі –

$$s + 2\sqrt{x-t-s} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(4(t+s) + s^2)$$

функциясы. Есептің бұдан басқа $x=t+s$ шешімі бар (§ 2, 2-мысалдың түсініктемесіне қараңыз).

2. Мына есептің

$$t \frac{\partial x}{\partial t} + s \frac{\partial x}{\partial s} = 2ts, \quad s=t, \quad x=t^2$$

шешімін табу керек.

ШЕШУІ. Сипаттауыштар теңдеуі

$$\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s} = \frac{dx}{2ts}$$

екі өзара тәуелсіз бірінші интегралға ие:

$$\frac{s}{t} = C_1, \quad x - ts = C_2.$$

Оларды бастапқы шартқа қойсақ, $C_1=1$, $C_2=0$ теңдіктерін аламыз. Бұдан берілген қисықтың бойындағы интегралдардың арасындағы байланыс $C_2 = f(C_1)$ шығады. Мұндағы $f - C_1$ -дің, $f(1)=0$ шартын қанағаттандыратын, кезкелген дифференциалданатын функциясы. Сондықтан қойылған Коши есебінің шешімі шексіз көп:

$$x = ts + f\left(\frac{s}{t}\right).$$

Жаттығулар

1. Мына теңдеудің

$$t \frac{\partial x}{\partial t} + s \frac{\partial x}{\partial s} = 0$$

интегралдық бетінің геометриялық қасиеттерін сипаттаңыз және $x = t$, $s = 1$ шартын қандай бет қанағаттандыратынын табыңыз.

2. Мына теңдеуді

$$(mx - ns) \frac{\partial x}{\partial t} + (nt - lx) \frac{\partial x}{\partial s} = ls - mt$$

шешіп, оның жалпы шешімі мен сипаттауыштарының геометриялық түсініктемесін беріңіз. Мұндағы l , m , n – белгілі тұрақтылар.

3. Берілген түзуді тұрақты бұрышпен қия отырып жылжитын түзу беттер жасайды. Осы беттердің дифференциалдық теңдеуін құрыңыз және оны интегралдаңыз (берілген түзу орнына Ox өсін алыңыз).

Бақылау сұрақтары

1. Белгісіз функция екі айнымалыдан тәуелді болатын бірінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеудің түрі қандай?
2. Сипаттауыш теңдеуінің интегралдық қисықтары мен дербес туындылы теңдеудің шешімін анықтайтын беттің арақатынасы қандай?
3. Коши есебі шешімінің геометриялық мағынасы неде?
4. Сырғымалы тік толқындар қалайша бейнеленеді?
5. Коши есебіндегі бастапқы мәндерді өзгерту арқылы есепке қандай мағына беруге болады?